

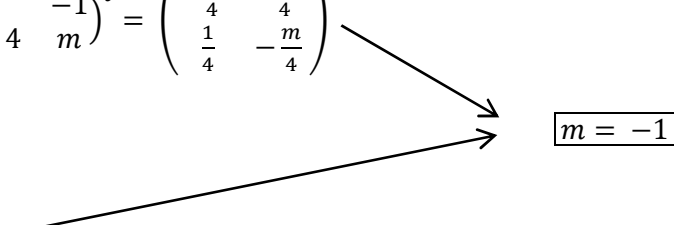
Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\text{a)} \quad |M| = \begin{vmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - m - 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

$$M^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -m-4 & m \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{m}{4} \end{pmatrix}$$


$$\frac{1}{4} M = \begin{pmatrix} \frac{m}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Outra forma de resolvelo:

$$M^{-1} = \frac{1}{4} M \Leftrightarrow \frac{1}{4} M \cdot M = I \Leftrightarrow M^2 = 4I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m^2 + m + 4 & m^2 + 5m + 4 \\ m + 1 & m + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

E polo tanto

$$\boxed{m = -1}$$

$$\text{b)} \quad B^t \cdot A \cdot X + C^t = X \Leftrightarrow (B^t \cdot A - I)X = -C^t$$

$$B^t \cdot A - I = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B^t \cdot A - I| = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists (B^t \cdot A - I)^{-1}$$

$$(B^t \cdot A - I)^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Entón:

$$X = -(B^t \cdot A - I)^{-1} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$$

Outra forma:

$$(B^t \cdot A - I)X = -C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 3z = -4 \\ -y = 2 \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -4/3 \\ y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{E así: } X = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:




a) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Polo tanto, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{2x - x^2}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-x^3 - 3x^2(2-x)}{x^6} = \frac{-x - 3(2-x)}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ f''(2) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Máximo relativo en } x = 2}$$

Para estudar o crecemento e decrecemento, podemos facer a seguinte táboa (temos un máximo relativo en $x = 2$ e o 0 non está no dominio da función):

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
$f(x)$			

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{Crecente en } (0, 2) \\ \text{Decrecente en } (-\infty, 0) \text{ e en } (2, \infty) \end{array}}$

b) Estudo da parábola:

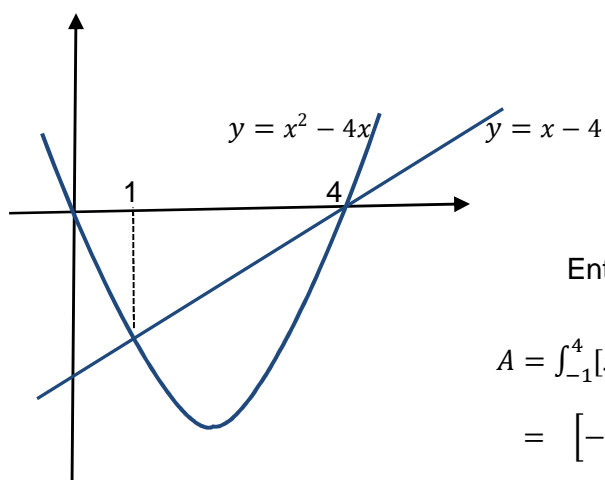
$$y = x^2 - 4x = x(x - 4) \Rightarrow \text{Puntos de corte cos eixes: } (0, 0) \text{ e } (4, 0)$$

$$y' = 2x - 4 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \text{Vértice: } (2, -4).$$

$$y'' = 2 \Rightarrow \text{Convexa.}$$

Puntos de corte da recta e a parábola:

$$x^2 - 4x = x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \Rightarrow (1, -3), (4, 0)$$



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^4 [x - 4 - (x^2 - 4x)] dx = \int_{-1}^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_{-1}^4 = -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{9}{2} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

- a) Os vectores $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-2, -2, -4)$ non son proporcionais. Polo tanto, os puntos A , B e C non están aliñados e determinan un plano π (o punto $A \in \pi$ e os vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} determinan π)

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8(x-3) - 4y + 6(z+1) = 0$$

$$\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$$

Para determinar λ , impoñemos que $D \in \pi$:

$$4\lambda + 12 + 3 - 15 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Tamén poderíamos determinar λ coa condición $\text{rang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 2$

- b) O vector director da recta r e o vector normal ao plano π son:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (8, 4, -6) \\ \vec{n}_\pi = (4, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi \Rightarrow \boxed{r \text{ e } \pi \text{ córtanse (son perpendiculares)}}$$

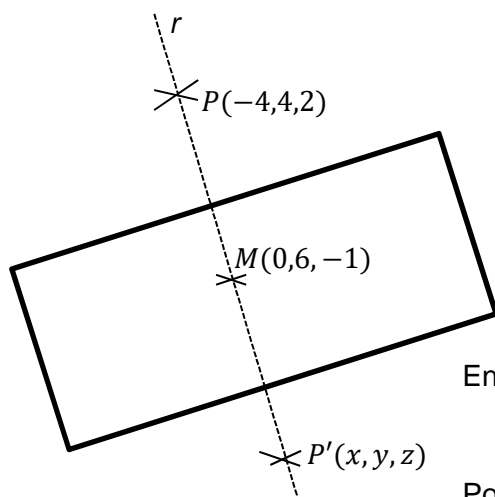
Para determinar o punto de corte da recta e o plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta ($P \in r$, \vec{v}_r é un vector director) e substituímos na ecuación do plano

$$r: \begin{cases} x = -4 + 8\lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 2 - 6\lambda \end{cases} \Rightarrow -16 + 32\lambda + 8 + 8\lambda - 6 + 18\lambda - 15 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2$$

Substituíndo este valor de λ nas ecuacións paramétricas, obtemos o punto de corte da recta e o plano

$$\boxed{M(0, 6, -1)}$$

c)



Temos que:

M é o punto de corte de r e π
 $P(-4, 4, 2)$ é un punto de r
 r é perpendicular a π

Entón M é o punto medio de P e o seu simétrico $P'(x, y, z)$

Polo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \frac{x-4}{2} \\ 6 = \frac{y+4}{2} \\ -1 = \frac{z+2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P'(4, 8, -4)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) Sexan:

A = "A bufanda é da marca A"

B = "A bufanda é da marca B"

C = "A bufanda é da marca C"

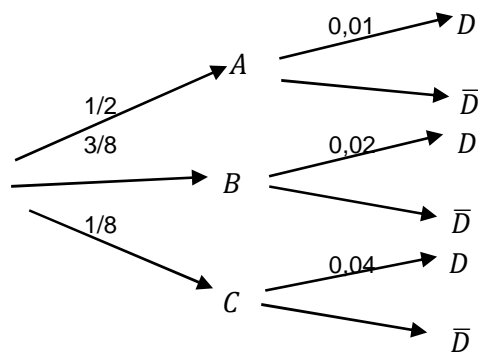
D = "A bufanda é defectuosa"

Entón temos:

$$P(A) = \frac{200}{200+150+50} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad P(B) = \frac{150}{200+150+50} = \frac{3}{8} = 0,375; \quad P(C) = \frac{50}{200+150+50} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$P(D/A) = 0,01; \quad P(D/B) = 0,02; \quad P(D/C) = 0,04$$

Podemos facer o seguinte diagrama en árbore:



a) Pola fórmula da probabilidade total, podemos calcular a probabilidade de que unha bufanda, elixida ao azar, sexa defectuosa:

$$P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C) = 0,01 \cdot 0,5 + 0,02 \cdot 0,375 + 0,04 \cdot 0,125 = 0,0175$$

E a probabilidade de que unha bufanda, elixida ao azar, sexa da marca A ou defectuosa será:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = 0,5 + 0,0175 - 0,5 \cdot 0,01 = \boxed{0,5125}$$

b) Para calcular a probabilidade de que unha bufanda, elixida ao azar, non sexa defectuosa nin da marca C usamos as leis de Morgan

$$\begin{aligned} P(\bar{D} \cap \bar{C}) &= P(\overline{D \cup C}) = 1 - P(D \cup C) = 1 - [P(D) + P(C) - P(D \cap C)] \\ &= 1 - 0,0175 - 0,125 + 0,04 \cdot 0,125 = \boxed{0,8625} \end{aligned}$$

c) Se sabemos que a bufanda non é defectuosa, queremos calcular a probabilidade de que sexa da marca B

$$P(B/\bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(B \cap \bar{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,98 \cdot 0,375}{1 - 0,0175} = \boxed{0,374}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m - 6 + 2m - 3 = 3m - 9 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{cases} \text{rang}(C) = 2 \text{ se } m = 3 \\ \text{rang}(C) = 3 \text{ se } m \neq 3 \end{cases}$$

Cálculo do rango da matriz ampliada (lembramos que sempre $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$):

- $m \neq 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$ (neste caso $\text{rang}(C) = 3$)
- $m = 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$ (se $m = 3$, 1ª ecuación = 3*2ª ecuación e $\text{rang}(C) = 2$)

Discusión:

$m = 3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 = \text{rang}(A) < n^{\circ} \text{ incógnitas. Sistema compatible indeterminado.}$
 $m \neq 3 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^{\circ} \text{ incógnitas. Sistema compatible determinado.}$

b) Para $m = 3$ xa vimos que era un sistema compatible indeterminado (infinitas solucións).

Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -z \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{cases} 3y = z + 3 \Rightarrow y = \frac{z}{3} + 1 \\ 3x = -z + 6 \Rightarrow x = -\frac{z}{3} + 2 \end{cases}$$

As infinitas solucións son

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\lambda}{3} + 2 \\ y &= \frac{\lambda}{3} + 1; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

Tamén poderíamos resolver o exercicio polo método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1^a) - 3 \cdot (2^a) \\ (3^a) - (2^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & m \end{array} \right)$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Se $m = 3$ suprimíse a primeira fila (queda unha fila de 0) e o sistema é compatible indeterminado

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -z \\ 3y = 3 + z \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = -z + 2\left(1 + \frac{z}{3}\right) = 2 - z/3 \\ y = 1 + \frac{z}{3} \end{array}$$

as infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 - \frac{\lambda}{3} \\ y = 1 + \frac{\lambda}{3}; \\ z = \lambda \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

se $m \neq 3$ o sistema é compatible determinado. Para cada valor de m , temos un sistema distinto con solución única.

Exercicio 2:

a) Para que a función sexa continua en $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{2x} + ax + b) = 1 + b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}(x^2 + 2)\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad 1 + b = 1 \Rightarrow b = 0$$

Por outra parte

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2e^{2x} + a) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{array}$$

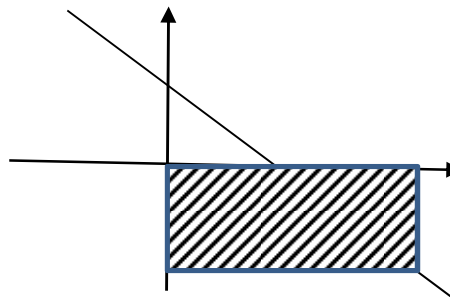
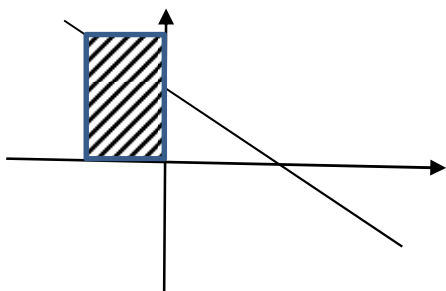
Polo tanto, para que a función sexa derivable en $x = 0$, debe cumprirse:

$$\left. \begin{array}{l} b = 0 \\ 2 + a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -2; b = 0}$$

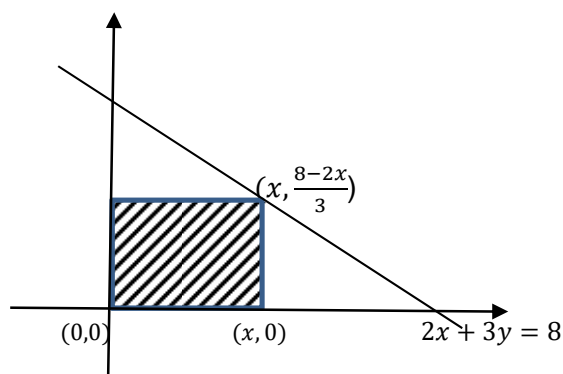
Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

b) A área non está acotada se o rectángulo está situado no segundo ou cuarto cuadrante



Se o rectángulo está situado no primeiro cuadrante:



Función a maximizar (área do rectángulo):

$$A(x) = \frac{x(8-2x)}{3} = \frac{8x-2x^2}{3}$$

Determinamos os puntos críticos:

$$A'(x) = \frac{1}{3}(8-4x)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$A''(x) = -4/3$$

} \Rightarrow máximo en $x = 2$

Polo tanto:

$$\boxed{\text{Vértices: } (0,0), (2,0), (0,4/3), (2,4/3)}$$

c) Calculamos a integral indefinida utilizando o cambio de variable: $x+1 = t^2$; $dx = 2tdt$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1} dx &= \int (t^2 - 1) \cdot 2t^2 dt = \int (2t^4 - 2t^2) dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + k = \\ &= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + k \end{aligned}$$

E calculamos a integral definida aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

Tamén poderíamos calcular a integral indefinida polo método de integración por partes:

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + k$$

E aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} \right]_0^3 = \frac{48}{3} - \frac{128}{15} + \frac{4}{15} = \frac{240}{15} - \frac{124}{15} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) A recta que pasa polos puntos P e Q ten como vector director:

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1 - a, 3 - a, -a)$$

Por outra parte, un vector normal ao plano é:

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, -2).$$

Entón

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow 2(1 - a) - (3 - a) + 2a = 0 \Leftrightarrow 2 - 2a - 3 + a + 2a = 0$$

$$\boxed{a = 1}$$

b) Polo apartado anterior, sabemos que se $a = 1$, a recta e o plano son paralelos, polo tanto a distancia entre a recta e o plano é igual á distancia entre un punto da recta (por exemplo P) e o plano

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 - 1 - 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \boxed{4/3 \text{ u}}$$

c) Sexa α o plano buscado. O plano α está determinado polos elementos seguintes

$$P(1,1,1) \in r \Rightarrow P(1,1,1) \in \alpha$$

$$\vec{v}_r = (0, 2, -1)$$

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, -2)$$

Son vectores contidos no plano α

Polo tanto:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow -5(x-1) - 2(y-1) - 4(z-1) = 0$$
$$\Rightarrow -5x - 2y - 4z + 11 = 0$$

$$\boxed{\alpha : 5x + 2y + 4z - 11 = 0}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

- a) Sexa $X = n^\circ$ de respostas acertadas. Trátase dunha distribución binomial $B(10; 0,25)$, pois a probabilidade de contestar ben unha pregunta é a mesma nos dez casos: 0,25

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^9 = 1 - 0,0563 - 0,1877 \\ &= \boxed{0,756} \end{aligned}$$

- b) Sea X la duración, en horas, de las pilas. X sigue una distribución normal $N(50; 5)$

$$\begin{array}{ccc} \text{Tipificación} & \frac{X-50}{5} = Z \longrightarrow & N(0,1) \\ \downarrow & \swarrow & \\ P(X < 42) = P\left(\frac{X-50}{5} < \frac{42-50}{5}\right) & = P(Z < -1,6) = P(Z > 1,6) = 1 - P(Z \leq 1,6) \\ & = 1 - 0,9452 = \boxed{0,0548} \end{array}$$